DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2015.02.012

关于任意同分布随机变量序列最大值不等式及应用*

陈传勇
（仲恺农业工程学院计算科学学院，广东 广州 510225）

摘 要：设 $\{X,X_n,n\geqslant 1\}$ 是同分布的随机变量序列（不必独立），记部分和 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,n\geqslant 1$。获得了 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\dfrac{|S_k|}{n^{\frac{1}{p}}}$ 的尾概率的一个上界，其中 $0<p<1$。作为一个应用，给出了正则和极大值函数 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{|S_n|}{n^{\frac{1}{p}}}$ 的 $r(r>0)$ 阶矩存在的充分条件，推广了独立情形相应的结果。

关键词：最大值不等式；同分布随机变量序列；尾概率

中图分类号：O211.4 **文献标志码：**A **文章编号：**0529-6579（2015）02-0059-03

On the Maximal Inequalities for the Arbitrary Identically Distributed Random Variables and Applications

CHEN Chuanyong
（College of Computation Science, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225, China）

Abstract: Let $\{X,X_n,n\geqslant 1\}$ be a sequence of identically distributed random variables (without any independence assumption) and denote $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,n\geqslant 1$. An upper bound for the distribution function of $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\dfrac{|S_k|}{n^{\frac{1}{p}}}$, with $0<p<1$, is given. As an application, a sufficient condition for the existence of the r-th ($r>0$) moments of $\sup\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{|S_n|}{n^{\frac{1}{p}}}$ is obtained.

Key words: maximal inequality; sequence of identically distributed random variables; tail probability

设随机变量序列 $\{X,X_n,n\geqslant 1\}$ 是两两可交换的，即对任意 $i\neq j$，(X_i,X_j) 有相同的分布。对任意 $n\geqslant 1$，记部分和为 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$。在此条件下，Etemadi[1] 获得了如下最大值不等式

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k|}{k}>5\lambda\right\}\leqslant 10\sum_{i=1}^{n}P\{|X|>\lambda i\}\quad(1)$$

对任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的 $\lambda>0$ 均成立。

作为（1）式的应用，Etemadi[1] 获得了正则和极大值函数矩存在性结果：对任意 $r\geqslant 1$，在条件

$$E|X|\log(1+|X|)<\infty,E|X|^r<\infty\quad(2)$$

下有

$$E\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{S_n}{n}\right|^r<\infty\quad(3)$$

在独立情形，有关随机变量 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\dfrac{|S_k|}{n^{\frac{1}{p}}}$ 的尾概率已被很多学者加以研究，可参见 Wang[2] 和 Siegmund[3] 及后面的参考文献。

关于正则和极大值，Marcinkiewicz 和 Zyg-

* **收稿日期：**2014-09-05
基金项目：国家自然科学基金资助项目（61374067）
作者简介：陈传勇（1976 年生），男；**研究方向：**概率论，随机过程，数理统计；E-mail：olive_001@163.com

mund[4]证明了（2）式可推出（3）式，而 Burkholder[5]则证明了（2）式与（3）式是相互等价的。更多的结果可参见 Choi 和 Sung[6]，Li[7]，Chen 和 Gan[8]，以及它们后面的参考文献。

当 $0 < p < 1$ 时，注意到由 C_{r-} 不等式有

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{S_k}{k^{1/p}}\right|^p \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\sum_{i=1}^{k}|X_i|^p}{k}$$

因此对任意 $n \geqslant 1$，任意 $\lambda > 0$，任意两两可交换的随机变量序列 $\{X, X_n, n \geqslant 1\}$，由（1）式有

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} > 5^{1/p}\lambda\right\} \leqslant 10\sum_{i=1}^{n}P\{|X| > \lambda i^{1/p}\} \tag{4}$$

本文的目的是对任意同分布的随机变量序列建立类似于（4）式的结果。下面是本文得到的主要结果，并且作为应用，给出了正则和极大值函数矩存在性的充分条件，推广了独立情形相应的结果。

定理 1 设 $0 < p < 1$，$\{X, X_n, n \geqslant 1\}$ 是任意同分布的随机变量序列。则对任意 $n \geqslant 1$ 及任意 $\lambda > 0$ 有

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} > (2^{1/p}+1)\lambda\right\} \leqslant \frac{2^{1/p+1}}{2^{1/p-1}-1}\sum_{i=1}^{n}P\{|X| > \lambda i^{1/p}\} \tag{5}$$

证明 因

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} > (2^{1/p}+1)\lambda\} \leqslant P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\sum_{i=1}^{k}(\frac{|X_i|}{\lambda})}{k^{1/p}} > (2^{1/p}+1)\}$$

于是不失一般性，可设 $X \geqslant 0$ 及 $\lambda = 1$。对任意 $m \geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}
&P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant 2^m}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} > 2^{1/p}\right\} = P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}\max_{2^{i-1}\leqslant k\leqslant 2^i}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} > 2^{1/p}\right\} \leqslant \\
&P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{S_{2^i}}{2^{i/p}} > 1\right\} \leqslant \\
&P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j \leqslant j^{1/p})}{2^{i/p}} > 1\right\} + P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant 2^m}\frac{X_i}{i^{1/p}} > 1\right\} \leqslant \\
&P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j \leqslant 2^{1/p})}{2^{i/p}} > 1\right\} + \sum_{i=1}^{2^m}P\{X_i > i^{1/p}\}
\end{aligned} \tag{6}$$

由 Markov 不等式，有

$$\begin{aligned}
&P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j \leqslant 2^{1/p})}{2^{i/p}} > 1\right\} \leqslant \\
&\sum_{i=1}^{m}P\left\{\frac{\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j \leqslant 2^{1/p})}{2^{i/p}} > 1\right\} \leqslant \\
&\sum_{i=1}^{m}2^{-i/p}E\sum_{j=1}^{2^i}X_jI(X_j \leqslant 2^{1/p}) = \\
&\sum_{i=1}^{m}2^{-i/p+i}EXI(X \leqslant 2^{i/p}) = \\
&\sum_{i=1}^{m}2^{-i/p+i}EXI(X \leqslant 1) + \\
&\sum_{i=1}^{m}2^{-i/p+i}\sum_{j=1}^{i}EXI(2^{j-1} \leqslant X^p \leqslant 2^j) \leqslant \\
&\frac{1}{2^{1/p-1}-1}EX^pI(X^p \leqslant 1) + \\
&\frac{2^{1/p-1}}{2^{1/p-1}-1}\sum_{j=1}^{m}2^{-j/p+i}EXI(2j^{-1} < X^p \leqslant 2^j) \leqslant \\
&\frac{1}{2^{1/p-1}-1}EX^pI(X^p \leqslant 1) + \\
&\frac{2^{1/p-1}}{2^{1/p-1}-1}\sum_{j=1}^{m}EX^pI(2j^{-1} < X^p \leqslant 2^j) \leqslant \\
&\frac{2^{1/p-1}}{2^{1/p-1}-1}EX^pI(X^p \leqslant 2^m)
\end{aligned} \tag{7}$$

由（6）式和（7）式有

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant 2^m}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} > 2^{1/p}\right\} \leqslant \frac{2^{1/p-1}}{2^{1/p-1}-1}EX^pI(X^p \leqslant 2^m) + \sum_{i=1}^{2^m}P\{X > i^{1/p}\} \tag{8}$$

当 $n = 1$ 时，（5）式成立。当 $n \geqslant 2$ 时，存在 $m \geqslant 1$，使得 $2^m \leqslant n \leqslant 2^{m+1}$，注意到

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant 2^{m+1}}\frac{|S_k|}{k^{1/p}}$$

于是由（8）式有

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} > 2^{1/p}\right\} \leqslant \frac{2^{1/p-1}}{2^{1/p-1}-1}EX^pI(X^p \leqslant 2^{m+1}) + \sum_{i=1}^{2^{m+1}}P\{X > i^{1/p}\} \tag{9}$$

因 $\{XnI(Xn > 1), n \geqslant 1\}$ 仍然是同分布的随机变量序列，因此由（9）式有

$$\begin{aligned}
&P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{|S_k|}{k^{1/p}} > (2^{1/p}+1)\right\} = \\
&P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\sum_{i=1}^{k}(X_iI(X_i \leqslant 1) + X_iI(X_i > 1))}{k^{1/p}} > (2^{1/p}+1)\right\} \leqslant P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\sum_{i=1}^{k}X_iI(X_i > 1)}{k^{1/p}} > 2^{1/p}\right\} \leqslant
\end{aligned}$$

$$\frac{2^{1/p-1}}{2^{1/p-1}-1}EX^pI(1<X^p\leqslant 2^{m+1})+\sum_{i=1}^{2^{m+1}}P\{X>i^{1/p}\}\leqslant$$
$$\left(\frac{2^{1/p-1}}{2^{1/p-1}-1}+1\right)\sum_{i=1}^{2^m}P\{X>i^{1/p}\}\leqslant$$
$$\frac{2^{1/p-1}}{2^{1/p-1}-1}\left(\sum_{i=1}^{n}P\{X>i^{1/p}\}+\sum_{i=n+1}^{2^{m+1}}P\{X>i^{1/p}\}\right)\leqslant$$
$$\frac{2^{1/p+1}}{2^{1/p-1}-1}\sum_{i=1}^{n}P\{X>i^{1/p}\}$$

定理 1 得以证明。作为定理 1 的应用可以得到下面定理 2。

定理 2　设 $0<p<1$，$r>0$，$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$ 是任意同分布的随机变量序列。如果

$$\begin{cases} E|X|^p<\infty, & p>r; \\ E|X|^p\log(1+|X|)<\infty, & p=r; \\ E|X|^r<\infty, & p<r \end{cases} \tag{10}$$

则有

$$E\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{S_n}{n^{1/p}}\right|^r<\infty \tag{11}$$

证明　容易证明（10）式等价于 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P\{|X|>m^{1/r}n^{1/p}\}<\infty$。因此由定理 1 有

$$E\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{S_n}{n^{1/p}}\right|^r\leqslant(2^{1/p}+1)^r\cdot$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}P\left\{\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{S_n}{n^{1/p}}\right|>(2^{1/p}+1)m^{1/r}\right\}\leqslant$$
$$(2^{1/p}+1)^r\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P\{|X|>m^{1/r}n^{1/p}\}<\infty$$

即（11）式成立。

推论 1　设 $0<p<1$，$r>0$，$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$ 是两两独立同分布的随机变量序列，则（10）与（11）等价。

证明　充分性由定理 2 可得。必要性的证明可参见 Chen 和 Gan[8] 有关证明方法，在这是具体证明过程不再详细给出。

参考文献：

[1] ETEMADI N. Maximal inequalities for averages of i. i. d. and 2-exchangeable random variables [J]. Statist Probab Lett, 1999, 44: 195 – 200.

[2] WANG Q. On the maximal inequality [J]. Statist Probab Lett, 1996, 31: 85 – 89.

[3] SIEGMUND D. On moments of the maximum of normed partial sums [J]. Ann Math Statist, 1969, 40: 527 – 531.

[4] MARCINKIEWICZ J, ZYGMUND A. Sur les fonctions independante [J]. Fund Math, 1937, 29: 60 – 90.

[5] BURKHOLDER D L. Successive conditional expectations of an integrable function [J]. Ann Math Statist, 1962, 33: 887 – 893.

[6] CHOI B D, SUNG S H. On moment conditions for the supremum of normed sums [J]. Stochastic Process Appl, 1987, 26: 99 – 106.

[7] LI D. On moments of the supremum of normed weighted averages [J]. Canadian J Statist, 1996, 4(3): 279 – 292.

[8] CHEN P, GAN S. On moments of the maximum of normed partial sums of ρ-mixing random variables [J]. Statist Probab Lett, 2008, 78: 1215 – 1221.